MATT PARKER

Ce se poate face în a patra dimensiune

Traducere din limba engleză și note de
Radu Timnea

Editura Paralela 45

Cuprins

Unu
Știți să numărați?

Atunci când trebuie să mă duc la dentist, îmi place să găsesc un gen de distracție mentală, cât timp un străin încearcă să se cațăre în gura mea, de obicei un joc cu numere pe care să-l pot juca în gând. De exemplu, într-o zi, în drum spre dentist, am lansat un apel pe Twitter, solicitând un puzzle matematic, pe care să încerc să îl rezolv fără să fie nevoie să scriu. Un prieten m-a provocat să ordonez toate cele nouă cifre, astfel încât numărul format din primele două să fie multiplu de 2, cel format din primele trei să fie multiplu de 3 și așa mai departe, până când numărul scris cu toate cele nouă cifre va fi multiplu de 9. Există o singură soluție.

Înainte să mă așez confortabil în scaunul dentistului, mi-am dat seama că ordonarea tradițională și plictisitoare: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 nu e răspunsul corect. Chiar dacă 12 este divizibil cu 2, iar 123 este divizibil cu 3, mai departe nu funcționează. 1234 nu se împarte exact la 4. Până la finalul procedurii dentare, găsisem o mare parte dintre cifre, dar nu pe toate. Și se pare că nu ai voie să stai pe scaunul dentistului după ce acesta termină treaba. Acasă, am ajuns la concluzia că singurul aranjament posibil este 381.654.729.

(Dacă nu vreți să folosiți toate cele nouă cifre și îl introduceți și pe 0, există o mulțime de variante, de exemplu: 480.006. Deoarece atât de multe combinații alăturate ale factorilor lor sunt divizibile, aceste numere sunt denumite numere poli-divizibile. Există 20.456 de numere poli-divizibile, cel mai mare dintre ele fiind: 3.608.528.850.368.400.786.036.725).

În mod interesant, acest puzzle are rezolvare datorită cifrelor pe care le utilizăm astăzi. Dacă ați fi dat acest exercițiu de inteligență unui locuitor al Romei antice, nu l-ar fi ajutat ca mod de distragere, în timpul unei proceduri dentare. Nu numai că romanii utilizau cifre diferite, cum ar fi V și X, dar cifrele lor aveau aceeași valoare, indiferent de poziția pe care o ocupau într-un număr. V însemna întotdeauna 5, X însemna întotdeauna 10. Ceea ce nu este valabil și pentru numerele noastre: 2 în numărul 12 reprezintă 2, în timp ce 2 în 123 reprezintă 20. Din fericire, stomatologia romană era brutală și rapidă.

Există un secret murdar, atunci când e vorba de un puzzle cu numere și, într-adevăr, și în cazul matematicii pe care o înveți la școală: mare parte a lor merge numai datorită modului în care scriem numerele. În sistemul nostru de numerație actual, dacă înmulțești numărul 111.111.111 cu el însuși, obții un număr destul de simpatic: 12.345.678.987.654.321 (toate cifrele numărate de la 1 la 9 și înapoi). Faptul este valabil și pentru numere cu mai puțini de 1: 11.111 × 11.111 = 123.454.321. Însă, dacă încerci să scrii numerele în alt mod, tiparul dispare. 111 este CXI, scris cu cifre romane, iar CXI × CXI dă un rezultat deloc plăcut: XMMCCCXXI.

Ceea ce demonstrează toate acestea este faptul că există o diferență între cuvântul „număr" și cuvântul „cifră". De exemplu, există numărul trei: 3 și cifra trei: 3. Deși par identice (în primul rând pentru că sunt identice), ele sunt niște lucruri ușor diferite. Un număr este exact ceea ce pare că este: reprezintă un număr de lucruri. 3 este un număr, 3.435 este tot un număr. Numerele sunt niște concepte abstracte, iar atunci când le scriem, utilizăm cifre. Prin urmare, o cifră este doar un simbol pentru a comunica un număr în scris, la fel cum literele sunt simboluri pe care le folosim ca să scriem cuvinte. Numărul 3.435 folosește cifrele 3, 4 și 5. Toată matematica pe care ați învățat-o și pe care o vedeți în jurul vostru se poate împărți în două categorii: matematică efectivă, având la bază proprietăți intrinsece; și rezultate care sunt doar un produs secundar al modului în care scriem cu stiloul pe hârtie.

Lucrurile se complică

Un lucru perfect cu care să începem (și un mod grozav ca totul să nu semene prea mult cu o lecție de matematică de la școală) este Trucul 37.

Alege orice cifră și scrie-o de trei ori. Vei avea în față ceva de genul: 333 sau 888. Adună cele trei cifre: $3 + 3 + 3 = 9$, sau $8 + 8 + 8 = 24$. Nimic interesant, până acum. Nu ai făcut altceva decât să aduni niște numere. Acum, împarte numărul inițial de trei cifre (333 sau 888) la suma cifrelor sale (9, respectiv 24). Poți să o faci fie cu calculatorul, fie prin forța pură a minții. Orice metodă ai folosi și indiferent de la ce cifră ai pornit, rezultatul va fi întotdeauna 37. Și acesta este motivul pentru care este deseori denumit Trucul 37.

Așa cum am mai spus, rezultatul este același, indiferent cu ce cifre ai începe. Totuși, această alegere liberă este redusă rapid. S-a stabilit clar că, la finalul calculului, vei obține 37. Există un pic de algebră în spatele trucului. Dacă scrii aceeași cifră de trei ori, este ca și cum ai înmulți-o cu 111. Dacă ai ales cifra 8, atunci 888 este rezultatul lui 8×111. Adunarea celor trei cifre înseamnă o înmulțire cu 3: $8 + 8 + 8 = 3 \times 8 = 24$. Prin urmare, dacă împarți 888 la 24, este același lucru cu a împărți 111 la 3, deoarece 8-urile se „reduc". Și la fel se întâmplă pentru toate cifrele...

... și totuși, nu e chiar așa. Dacă un roman ar fi ales cifra V, Trucul 37 nu ar mai fi dus la rezultatul 37 și, prin urmare, nu ar mai fi cunoscut sub numele de Trucul 37. De fapt, n-ar mai fi niciun truc. Din fericire, cel puțin în acest caz, sistemul nostru actual de zece cifre este folosit aproape în exclusivitate în prezent, dar, dacă ai fi vrut să impresionezi un locuitor al Babilonului antic, trucul nu ar fi fost o alegere prea bună, pentru că el scria numerele într-un mod total diferit față de cum o facem noi astăzi. Dacă am fi vizitați vreodată de niște extratereștri ipotetici, care este posibil să scrie numerele în tot felul de moduri ciudate, aproape sigur nu ar merge nici cu ei. Acest truc este o combinație între ceea ce noi considerăm a fi proprietățile „fundamentale" ale numerelor (și anume faptul că nu se schimbă, atunci când sunt scrise în moduri diferite) și o ciudățenie a sistemului nostru actual de a exprima numerele.

Dar de ce se întâmplă asta? Ei bine, 111 este divizibil cu 3, indiferent cum ai scrie cifrele. CXI este divizibil prin III, 百十一 este divizibil prin 三, și orice extraterestru, din orice parte a universului, va ști că o sută unsprezece este divizibil prin trei. Răspunsul este întotdeauna 37 (sau XXXVII, sau 参拾七, sau vreo înfloritură extraterestră care înseamnă „treizeci și șapte"). Dacă ai o grămadă formată din o sută unsprezece pietre, vei reuși întotdeauna să o împarți în trei grămezi de câte treizeci și șapte de pietre. Și cum această proprietate nu are legătură cu modul de exprimare a numerelor, matematicienii o consideră a fi una dintre proprietățile abstracte cele mai importante.

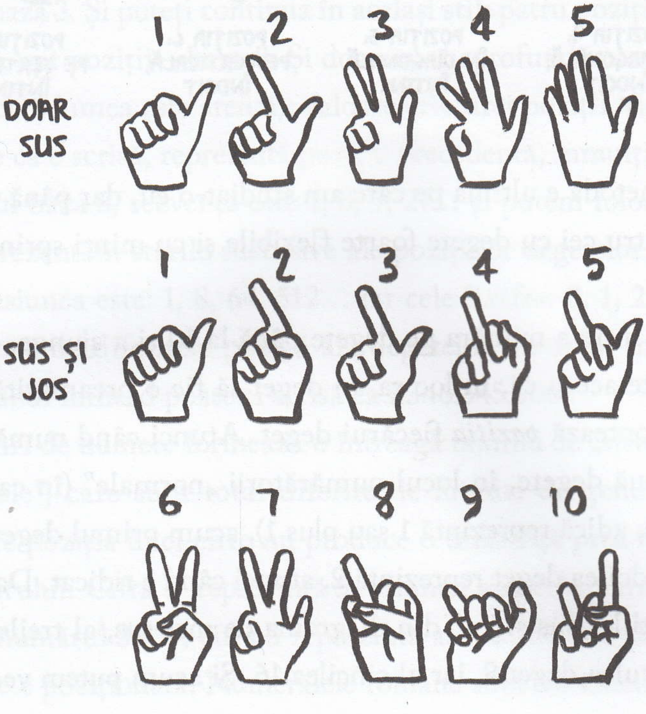
Privind cealaltă parte a monedei, faptul că scrierea unei cifre de trei ori este același lucru cu a o înmulți cu 111 este doar un efect secundar neintenționat al modului în care scriem noi numerele. Dacă am fi folosit cifrele romane, scrierea aceleiași cifre de trei ori ar fi însemnat multiplicarea ei cu 3, nu cu 111 (VVV = III × V).

O parte a forței matematicii este aceea că exprimă adevăruri universale, dar este capabilă să le exprime în moduri diferite. Mayașii sau romanii din Antichitate învățau aceeași matematică, dar ei scriau numerele folosind sisteme foarte diferite față de cel modern. Pentru explorarea lumii matematicii, trebuie să știm ce limbă vorbește fiecare. Haideți să începem cu sistemul pe care îl folosim astăzi… și care nu este, neapărat, cel mai bun.

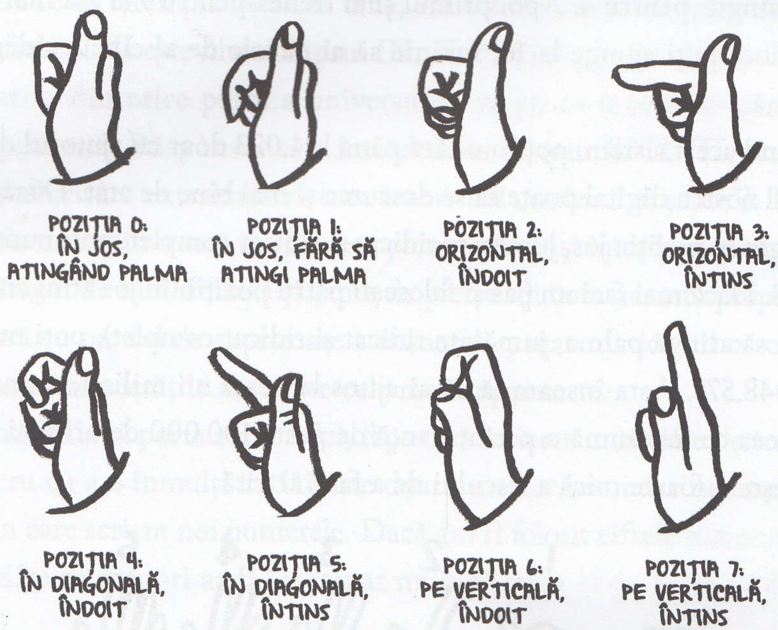
Ce este un număr?

Care este cel mai mare număr pe care îl puteți număra cu ajutorul degetelor? Ei bine, majoritatea oamenilor se opresc din număratul pe degete atunci când ajung la zece, în principal pentru că au terminat degetele. Dar nu toată lumea folosește sistemul acesta destul de limitat, de a-și ridica degetele ca să numere, fără să le mai lase în jos. Dacă lași degetele în jos, atunci poți număra până la 3 folosind doar primele două degete. Ridici primul deget pentru 1, pe al doilea pentru 2 și pe amândouă pentru 3. Așa, ai disponibil al treilea deget, pe care să-l ridici singur pentru 4. Apoi primul și al treilea pentru 5 și așa mai departe. În acest mod, poți ajunge la 16, înainte să ai nevoie de al cincilea deget de la prima mână.

Folosind acest sistem, poți număra până la 1.023 doar cu ajutorul degetelor. Dar abacul nostru digital poate să se descurce și mai bine de atât. Dacă folosești fiecare deget în poziția jos, jumătate ridicat și ridicat complet, poți număra de la 0 la 59.048. Dacă mai faci un pas și folosești patru poziții (în jos atingând palma, în jos fără să atingă palma, jumătate ridicat și ridicat complet), poți număra de la 0 la 1.048.575. Asta înseamnă că ai ajuns la peste un milion, numărând pe degete. Ceea ce înseamnă o performanță de peste 100.000 de ori mai bună, cu doar o creștere foarte mică a riscului de a face artrită.



Și de ce să ne oprim aici? Dacă folosești opt poziții pentru fiecare deget, atunci nu numai că ai atins un nivel necunoscut anterior al dexterității digitale, dar acum poți număra de la 0 la 1.073.741.823: peste un miliard! Bineînțeles, un efect negativ ar fi acela că ai putea să reușești, accidental, să intri în vreo bandă de stradă.



Această metodă e ultima pe care am studiat-o eu, dar până unde am putea continua? Pentru cei cu degete foarte flexibile și cu minți sprintene, nu există limită.

Diferența între a număra pe degete până la 10 și a ajunge, dintr-odată, la un miliard este aceea că, în loc ca un deget să fie o preamărită crestătură pe răboj, acum contează *poziția* fiecărui deget. Atunci când numărăm până la 3 cu primele două degete, în locul numărătorii „normale" (în care toate degetele sunt egale, adică reprezintă 1 sau plus 1), acum primul deget ridicat reprezintă 1, dar al doilea deget reprezintă 2, atunci când e ridicat. Dacă continuăm, folosind direcțiile „sus și jos" din diagrama de mai sus, al treilea deget reprezintă 4, al patrulea deget 8, iar al cincilea 16. Și acum putem vedea că există o